

# Zur näherungsweisen Berechnung der elektrischen Leitfähigkeit eines Plasmas

H. Schirmer und I. Stober \*

OSRAM-Studiengesellschaft München

*Herrn Prof. Dr. H. Maecker herzlich zum 60. Geburtstag gewidmet*

(Z. Naturforsch. **28 a**, 1454–1458 [1973]; eingegangen am 2. Mai 1973)

*An Approximate Calculation of the Electrical Conductivity of a Plasma*

In order to calculate the electrical conductivity of a plasma an approximate formula has been derived which is based on an improvement of the expression corresponding to a Lorentzian gas. The deviation from the exact solution (which is based on the Boltzmann equation of a plasma) is in most cases lower than 5% and will exceed this deviation only in exceptional cases.

The calculations have been performed for xenon and neon.

Es wird ein Näherungsausdruck zur Berechnung der elektrischen Leitfähigkeit eines Plasmas angegeben, der auf einer Verbesserung des Ausdrucks für ein Lorentz-Gas beruht. Der Fehler gegenüber der exakten – auf der Boltzman-Gleichung für ein Plasma beruhenden – Lösung in der Regel wesentlich unter 5% liegen und diese nur in Ausnahmefällen überschreiten.

Die Berechnungen wurden für Xenon und Neon durchgeführt.

## 1. Einleitung

Die Formeln für die elektrische Leitfähigkeit lassen sich bekanntlich für ein „Lorentz-Gas“, innerhalb dessen die Elektronen-Wechselwirkung vernachlässigt wird, in geschlossener Form darstellen; für ein Plasma dagegen ist dies nicht möglich<sup>1, 2</sup>. Es erschien uns daher zweckmäßig, die Ausdrücke für ein Lorentz-Gas so zu modifizieren, daß sie die Berechnung der elektrischen Leitfähigkeit auch für ein Plasma in sehr guter Näherung gestatten. Ein derartiges Vorgehen hat den Vorteil, die Leitfähigkeit für ein Plasma ohne größeren rechnerischen Aufwand zu erhalten.

## 2. Lorentz-Gas und Plasma

Die elektrische Leitfähigkeit für ein Lorentz-Gas ist gegeben durch den Ausdruck

$$\sigma_L = \frac{2}{3} e n_e \frac{e}{m} \left( \frac{1}{v} \right) \bar{A}_\sigma \quad (1)$$

Sonderdruckanforderungen an Prof. Dr. H. Schirmer, OSRAM-Studiengesellschaft, D-8000 München 90, Hellabrunner Straße 1.

\* Auszugsweise vorgetragen auf der Frühjahrstagung Plasmaphysik und Gasentladungen in Berlin am 10. April 1973.

mit

$$\left( \frac{1}{v} \right) = \frac{2}{V\pi} \frac{1}{w}, \quad w = \sqrt{\frac{2 k T}{m}} \quad (2)$$

und

$$\bar{A}_\sigma = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \int_0^\infty \frac{z F_0(z) dz}{n_a [Q_a(z) + (n_i/n_a) Q_i(z)]} \quad (1a)$$

als „mittlere freie Weglänge“ der Elektronen innerhalb des Lorentz-Gases, die für die elektrische Leitfähigkeit maßgeblich ist.

Die mittlere freie Weglänge  $\bar{A}_\sigma$  ist durch die „Querschnitte“ der Atome  $Q_a(z)$  und der Ionen  $Q_i(z)$  bestimmt, die von der Geschwindigkeit

$$z = v/w \quad (3)$$

des Elektrons abhängen;

$$F_0(z) = (4/V\pi) z^2 \exp\{-z^2\} \quad (4)$$

ist hierbei das Maxwell-Boltzmannsche Geschwindigkeitsverteilungsgesetz.

Im folgenden wird für die elektrische Leitfähigkeit  $\sigma$  eines *Plasmas* der Ausdruck

$$\sigma = \frac{2}{3} e n_e \frac{e}{m} \left( \frac{1}{v} \right) \bar{A}_\sigma \quad (5)$$

eingeführt mit

$$\bar{A}_\sigma = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \int_0^\infty \frac{z F_0(z) dz}{n_a [Q_a(z) + (1/\gamma_i) (n_i/n_a) Q_i(z)]} \quad (5a)$$

als „mittlere freie Weglänge“ der Elektronen innerhalb eines *Plasmas*. Hierbei stellt der Faktor  $1/\gamma_i$  vor dem Ionenquerschnitt  $Q_i(z)$  die Änderung dar, die an die Formel für ein Lorentz-Gas anzubringen ist, um den Übergang zum Plasma zu bewerkstelligen.



Dieses Werk wurde im Jahr 2013 vom Verlag Zeitschrift für Naturforschung in Zusammenarbeit mit der Max-Planck-Gesellschaft zur Förderung der Wissenschaften e.V. digitalisiert und unter folgender Lizenz veröffentlicht: Creative Commons Namensnennung-Keine Bearbeitung 3.0 Deutschland Lizenz.

Zum 01.01.2015 ist eine Anpassung der Lizenzbedingungen (Entfall der Creative Commons Lizenzbedingung „Keine Bearbeitung“) beabsichtigt, um eine Nachnutzung auch im Rahmen zukünftiger wissenschaftlicher Nutzungsformen zu ermöglichen.

This work has been digitized and published in 2013 by Verlag Zeitschrift für Naturforschung in cooperation with the Max Planck Society for the Advancement of Science under a Creative Commons Attribution-NoDerivs 3.0 Germany License.

On 01.01.2015 it is planned to change the License Conditions (the removal of the Creative Commons License condition "no derivative works"). This is to allow reuse in the area of future scientific usage.

Es werde bemerkt, daß sich  $\sigma$  auch in der Form

$$\sigma = \frac{2}{3} e n_e \frac{e}{m} \left( \frac{1}{v} \right) 1/n_a \left[ \bar{Q}_a + \frac{1}{\gamma_i} \frac{n_i}{n_a} \bar{Q}_i \right] \quad (6)$$

mit Hilfe der mittleren Querschnitte  $\bar{Q}_a$  und  $\bar{Q}_i$

$$\bar{Q}_a = \frac{1}{l_\sigma} \frac{2}{3} \int_0^\infty \left\{ Q_a(z) z^2 F_0(z) / n_a \left[ Q_a(z) + \frac{1}{\gamma_i} \frac{n_i}{n_a} Q_i(z) \right] \right\} dz, \quad (6a)$$

$$\frac{n_i}{n_a} \bar{Q}_i = \frac{1}{l_\sigma} \frac{2}{3} \int_0^\infty \left\{ \frac{n_i}{n_a} Q_i(z) z^2 F_0(z) / n_a \left[ Q_a(z) + \frac{1}{\gamma_i} \frac{n_i}{n_a} Q_i(z) \right] \right\} dz \quad (6b)$$

darstellen läßt; nach Einsetzen von (6a) und (6b) in (6) ergibt sich direkt (5) mit (5a).

Diese Ausdrücke sind von Interesse, wenn man Wert darauf legt, den Einfluß des atomaren Feldes gegenüber dem Ionenfeld, ausgedrückt durch die „Querschnitte“  $\bar{Q}_a$  und  $\bar{Q}_i$ , zu erfassen. Im allgemeinen wird man zur numerischen Berechnung von  $\sigma$  Ausdruck (5) als einfachsten und am schnellsten zum Ziele führenden verwenden.

Die Ableitung der Formeln (6), (6a) und (6b) folgt später (Anhang).

Es erscheint noch die Bemerkung von Interesse, daß der mittlere atomare Querschnitt  $\bar{Q}_a$  auch durch das Ionenfeld  $Q_i(z)$ , der mittlere Ionenquerschnitt  $\bar{Q}_i$  auch durch das atomare Feld  $Q_a(z)$  mitbestimmt ist. Die Darstellung des  $\bar{Q}_a$  allein durch  $Q_a(z)$  und des  $\bar{Q}_i$  allein durch  $Q_i(z)$  wird nur durch die Langevin'sche Formel

$$\sigma = \frac{3}{4} e n_e \frac{e}{m} \frac{1}{\bar{v}} 1/n_a \left[ (\bar{Q}_a)_{LgV} + \left( \frac{n_i}{n_a} \bar{Q}_i \right)_{LgV} \right] \quad (7)$$

mit

$$(\bar{Q}_a)_{LgV} = \frac{\sqrt{\pi}}{4} \int_0^\infty Q_a(z) z^3 F_0(z) dz \quad (7a)$$

und

$$\left( \frac{n_i}{n_a} \bar{Q}_i \right)_{LgV} = \frac{\sqrt{\pi}}{4} \int_0^\infty \frac{n_i}{n_a} Q_i(z) z^3 F_0(z) dz \quad (7b)$$

gegeben, die aber nur nullte Näherung (sowohl für ein Lorentz-Gas als auch für ein Plasma!) ist.

### 3. Der Übergang vom Lorentz-Gas zum Plasma mittels $\gamma_i$

Von Spitzer und Mitarbeitern<sup>3</sup> ist ein Faktor  $\gamma$  in der Form

$$\gamma = \sigma^{(i)} / \sigma_L^{(i)}$$

eingeführt worden, wobei  $\sigma^{(i)}$  die elektrische Leitfähigkeit eines vollständig ionisierten Plasmas,  $\sigma_L^{(i)}$  die des zugehörigen vollständig ionisierten Lorentz-Gases bedeute.

Spitzer und Mitarbeiter haben den Wert für  $\gamma$  zu 0,5816 berechnet, während Landshoff<sup>4</sup> fand

$$\gamma = 0,5790,$$

einen Wert, den auch wir bis zur vierten Dezimalen erhalten haben<sup>5</sup>.

Dieser Wert ergibt sich jedoch nur bei Nichtberücksichtigung des logarithmischen Gliedes für den Ionenquerschnitt  $Q_i$ ; bei Berücksichtigung desselben ist der Wert ein höherer (Abschnitt 5).

Er ist jedoch praktisch konstant, nur sehr wenig abhängig von dem für den Ionenquerschnitt verwendeten Ausdruck und von der Temperatur.

Es erscheint nun naheliegend, in (5a)

$$\gamma_i = \gamma \quad (8)$$

zu setzen unter Berücksichtigung der logarithmischen Abhängigkeit des Ionenquerschnitts  $Q_i(z)$  von  $z$ . Ausdruck (5a) würde dann für höhere Temperaturen in den Ausdruck für ein reines Ionenplasma, für niedrigere Temperaturen dagegen in den Ausdruck für ein praktisch atomares Plasma einmünden.

Für hohe Temperaturen wäre  $n_a Q_a$  als Störung des Ionenfeldes  $n_i Q_i$ , für niedrige Temperaturen dagegen wäre  $n_i Q_i$  als Störung des atomaren Feldes  $n_a Q_a$  aufzufassen.

Es hat sich jedoch gezeigt, daß es zweckmäßig ist,  $\gamma_i$  zu variieren (Abschnitt 5).

### 4. Atomarer Querschnitt und Ionenquerschnitt

Es wird angenommen, daß der atomare Querschnitt gegenüber Elektronenstoß bekannt sei, etwa

in Form von Messungen oder auf Grund quantenmechanischer Rechnungen. Die Streuung von Elektronen der Geschwindigkeit  $z$  an Ionen der Ladung  $Z e$  erfolgt gemäß der Rutherford'schen Streuformel

$$a = (a_1/z^2) \operatorname{ctg}(\vartheta/2);$$

hierbei ist  $a$  der Stoßparameter,  $\vartheta$  der Ablenkungswinkel und

$$a_1 = Z e^2/m w^2.$$

Entsprechend der Definition des Transportquerschnitts<sup>5</sup>

$$Q_i(z) = 2 \pi \int_{\vartheta_0}^{\pi} (1 - \cos \vartheta) I(\vartheta) \sin \vartheta d\vartheta \quad (9)$$

ergibt sich der „Gvosdover-Querschnitt“

$$Q_i(z) = \frac{2 \pi a_1^2}{z^4} \ln \left[ 1 + \left( \frac{a_0}{a_1} \right)^2 z^4 \right]. \quad (9 \text{ a})$$

Es erscheint uns naheliegend, den maximalen Stoßwarameter  $a_0$  mittels der sog. „Interionendistanz“<sup>6</sup>

$$d = 1 / \left( \frac{4}{3} \pi \right)^{1/4} n_i^{1/3} \quad (10)$$

anzusetzen in der Form

$$a_0 = d. \quad (10 \text{ a})$$

Es ist wohlbekannt, daß der gemäß (9 a) mit (10 a) gewählte Gvosdover-Querschnitt zu klein ist, weil infolge des willkürlichen Abschneidens in der Form

$$a_0 = (a_1/z^2) \operatorname{ctg}(\vartheta_0/2)$$

die Zahl der nur gering abgelenkten Stöße nicht ausreichend erfaßt wird<sup>6</sup>.

Von diesem Mangel frei ist ein Ausdruck, der auf dem Potential

$$V = (Z e^2/r) e^{-r/D} \quad (11)$$

beruht mit  $D$  als „Debye-Länge“, im Falle eines einfach ionisierten Plasmas  $n_e = n_i$  mit  $Z = 1$  gegeben durch den Ausdruck

$$D = \sqrt{k T / 8 \pi e^2 n_e},$$

weil bei der folgenden Integration zum  $Q_i(z)$  das Abschneiden vermieden wird.

Der zum Potential (11) gehörende differentielle Wirkungsquerschnitt  $I(\vartheta)$  kann mittels der Bornschen Näherung berechnet werden<sup>7</sup>. Wir haben so gemäß (9) mit den Abkürzungen ( $h$  Planck'sches Wirkungsquantum)

$$\beta = \frac{1}{4 \pi} \frac{\lambda_w}{D} \frac{1}{z}, \quad \lambda_w = \frac{h}{m w}$$

den Ausdruck

$$Q_i(z) = \frac{2 \pi a_1^2}{z^4} \frac{1}{4} \int_{\vartheta_0}^{\pi} \frac{(1 - \cos \vartheta) \sin \vartheta d\vartheta}{(\sin^2(\vartheta/2) + \beta^2)^2}$$

abgeleitet. Die Festsetzung

$$\vartheta_0 = 0,$$

die plasmaphysikalisch die Miterfassung auch kleinsten Ablenkungen bedeutet, liefert

$$Q_i(z) = \frac{2 \pi a_1^2}{z^4} \left[ \ln \left( 1 + \frac{1}{\beta^2} \right) - 1 + \frac{1}{1 + 1/\beta^2} \right], \quad (12)$$

wobei wegen  $\beta \ll 1$  (Zulässigkeit der Bornschen Näherung!) der letzte Term innerhalb der eckigen Klammer gewöhnlich vernachlässigt werden kann.

Diese Querschnittsformel (12) ist bereits von Majumdar<sup>8</sup> angegeben worden, der statt der Debye-Länge  $D$  die Interionendistanz benutzte.

Ausdruck (12) ist ähnlich einem in anderer Weise abgeleiteten Ausdruck von Marshak<sup>9</sup>

$$Q_i(z) = (2 \pi a_1^2/z^4) \ln(1 + 1/\beta^2),$$

der ebenfalls darauf abzielt, auch die kleinsten Ablenkungen zu erfassen.

## 5. Die Variation des $\gamma_i$

Es hat sich durch Vergleich mit Berechnungen der Näherungen der exakten Boltzmann-Theorie<sup>1,5</sup> gezeigt, daß zur Bestimmung des  $\gamma_i$  der einfache Ansatz (8) nicht ausreichend ist, daß vielmehr eine Variation des  $\gamma_i$  mit Ionisierungsgrad  $\varepsilon$  und Druck  $p$  notwendig ist.

Dabei wurden Berechnungen nicht nur für Edelgasplasmen, sondern auch für andere Plasmen mit gänzlich anderen Querschnitten  $Q_a$  durchgeführt.

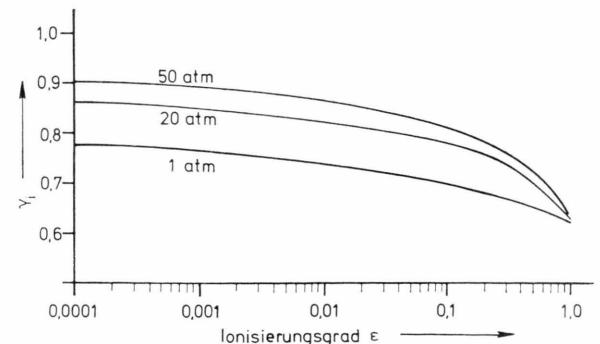


Abb. 1.  $\gamma_i$  in Abhängigkeit vom Ionisierungsgrad mit Druck als Parameter.

Abbildung 1 zeigt diese Variation des  $\gamma_i$ , die Näherungen zuläßt, die gegenüber den als exakt anzusehenden Werten entsprechend der Boltzmann-Theorie um maximal ca. 5% differieren.

## 6. Ergebnisse

Abbildung 2 lässt das Ergebnis für die Edelgase Xenon und Neon erkennen. Sie gibt die elektrische Leitfähigkeit von Xenon- und Neon-Plasmen im Temperaturintervall zwischen 6000 und 14 000 K und im Druckintervall zwischen 1 und 50 at an, berechnet nach (5) mit Ionenquerschnitten nach (12).

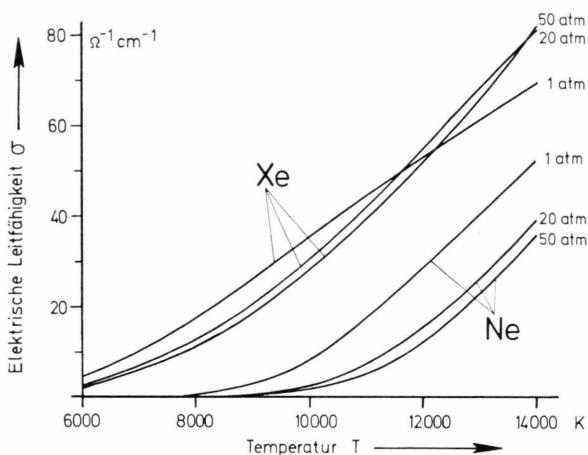


Abb. 2. Elektrische Leitfähigkeit  $\sigma$  in Abhängigkeit von der Temperatur für Xenon und Neon mit Ionenquerschnitten nach Majumdar.

Abbildung 3 zeigt dasselbe, jedoch mit Anwendung des Gvosdover- statt des Majumdar-Querschnitts.

Da die nach Gvosdover berechneten Ionenquerschnitte kleiner als die nach Majumdar berechneten

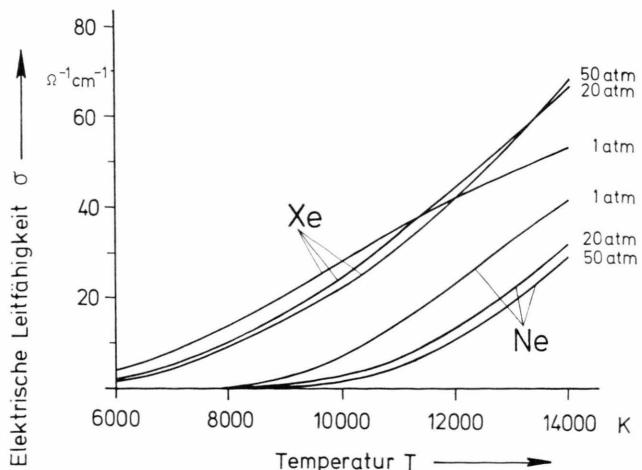


Abb. 3. Elektrische Leitfähigkeit  $\sigma$  in Abhängigkeit von der Temperatur für Xenon und Neon mit Ionenquerschnitten nach Gvosdover.

Die Näherungsmethode ist von großem praktischem Interesse, da der Rechenaufwand gegenüber der exakten Theorie höchstens 1/8 beträgt.

Die nach Majumdar berechneten  $\sigma$ -Werte stimmen gut mit Werten überein, die von Günther und Radtke<sup>10</sup> durch Messungen (an Xenon für 20 at) ermittelt worden sind. Die theoretisch berechneten Werte liegen durchgehend etwas tiefer als die experimentell ermittelten, durchschnittlich um ca. 5%.

## Anhang

Es ist möglich, neben den Formeln (5) und (6) auch die Formel

$$\sigma = \frac{2}{3} e n_e \frac{e}{m} \left( \frac{1}{v} \right) 1/n_a \left[ \bar{Q}_{aL} + \frac{1}{\gamma_i} \frac{n_i}{n_a} \bar{Q}_{iL} \right] \quad (13)$$

zur näherungsweisen Berechnung der elektrischen Leitfähigkeit zu benutzen, die (6) ähnlich ist; es ist hier

$$\bar{Q}_{aL} = \frac{1}{A_\sigma} \frac{2}{3} \int_0^\infty \left\{ Q_a(z) z^2 F_0(z) / n_a \left[ Q_a(z) + \frac{n_i}{n_a} Q_i(z) \right] \right\} dz, \quad (13a)$$

$$\frac{n_i}{n_a} \bar{Q}_{iL} = \frac{1}{A_\sigma} \frac{2}{3} \int_0^\infty \left\{ \frac{n_i}{n_a} Q_i(z) z^2 F_0(z) / n_a \left[ Q_a(z) + \frac{n_i}{n_a} Q_i(z) \right] \right\} dz. \quad (13b)$$

sind, liegen die Werte für die elektrische Leitfähigkeit, die mit Hilfe der Gvosdover-Querschnitte berechnet wurden, durchgehend höher als die, die mit

Hilfe der Majumdar-Querschnitte berechnet wurden. Die letzten Werte werden als die zuverlässigeren angesehen.

Numerische Rechnungen haben gezeigt, daß die beiden Ausdrücke (5) und (13) nahezu das gleiche Resultat liefern, wobei Ausdruck (5) jedoch der anwendungsmäßig einfachere ist. Im folgenden werden die Formeln (6), (6 a), (6 b) und (13), (13 a), (13 b) mit  $\gamma_i = 1$  abgeleitet.

Entsprechend dem Ansatz für die Störungsfunktion des Lorentz-Gases<sup>1</sup>

$$f = f_0 [1 + v_x \psi(v, x)] \quad (14)$$

ergibt sich für  $\psi(v)$  unter der Voraussetzung eines fehlenden Temperaturgradienten

$$\psi(v) = \frac{A(v)}{v} - \frac{2}{w^2} \frac{e}{m} G$$

( $G$  elektrischer Gradient, Feldstärke) und mit<sup>2</sup>

$$j = e n_e u_e, \quad u_e = b_e G,$$

$$A(v) = 1/n_a \left[ Q_a(v) + \frac{n_i}{n_a} Q_i(v) \right],$$

Multiplikation mit  $v_x d^3v$  und anschließende Integration liefert

$$-\frac{2}{w^2} \frac{e}{m} G \int v_x^2 f_0 d^3v = -n_a \int \left( Q_a + \frac{n_i}{n_a} Q_i \right) v_x^2 v \psi(v) f_0 d^3v$$

oder mit (4)

$$-\frac{2}{w^2} \frac{e}{m} G \frac{1}{3} \int_0^\infty v^2 F_0 dv = -n_a \frac{1}{3} \int_0^\infty \left( Q_a + \frac{n_i}{n_a} Q_i \right) v^2 v \psi(v) F_0 dv$$

$$\text{bzw. } \frac{e}{m} G = \frac{1}{3} w n_e n_a \left[ \int_0^\infty Q_a(z) z^2 \frac{w^2 z \psi(z)}{u_e} F_0(z) dz + \int_0^\infty \frac{n_i}{n_a} Q_i(z) z^2 \frac{w^2 z \psi(z)}{u_e} F_0(z) dz \right]. \quad (16)$$

Wird nun (15) in (16) eingesetzt, so ergeben sich schließlich unter Beachtung von (2) die Ausdrücke

<sup>1</sup> H. Schirmer, Z. Physik **142**, 1 [1955].

<sup>2</sup> H. Schirmer u. J. Friedrich, Z. Physik **151**, 174 [1958].

<sup>3</sup> R. S. Cohen, L. Spitzer, and P. McR. Routly, Phys. Rev. **80**, 230 [1950].

<sup>4</sup> R. Landshoff, Phys. Rev. **76**, 904 [1949]; **82**, 442 [1951].

<sup>5</sup> H. Schirmer u. J. Friedrich, Z. Physik **151**, 375 [1958].

<sup>6</sup> L. Oster, Z. Astrophysik **42**, 228 [1957].

$$b_e = \frac{2}{3} \frac{e}{m} \frac{1}{w^2} \int_0^\infty A(v) v F_0(v) dv$$

ergibt sich unter Beachtung von (3)

$$\psi(z) = \frac{2}{w^2} u_e \left( \frac{3}{2} \left[ 1 \int_0^\infty A(z) z F_0(z) dz \right] \frac{A(z)}{z} \right)$$

und schließlich gemäß (1 a)

$$\frac{w^2 z \psi(z)}{u_e} = \frac{3}{2} V^\pi \frac{A(z)}{A_\sigma}. \quad (15)$$

Die Boltzmann-Gleichung eines Lorentz-Gases führt mit (14) unter der Voraussetzung, daß kein Temperaturgradient vorhanden sei, auf die Gleichung

$$\begin{aligned} -\frac{2}{w^2} \frac{e}{m} G v_x f_0 \\ = -n_a v \left( Q_a(v) + \frac{n_i}{n_a} Q_i(v) \right) \psi v_x f_0. \end{aligned}$$

(6) bis (6 b) bzw. (13) bis (13 b), bezogen auf ein Lorentz-Gas ( $\gamma_i = 1$ ).

<sup>7</sup> G. Wentzel, Z. Physik **40**, 590 [1927]; S. Flügge u. H. Marschall, Rechenmethoden der Quantentheorie, Springer-Verlag, Berlin 1965.

<sup>8</sup> R. C. Majumdar, Z. Physik **107**, 599 [1937].

<sup>9</sup> R. E. Marshak, Ann. New York, Acad. Sci. **41**, 49 [1941].

<sup>10</sup> K. Günther u. R. Radtke, Beitr. Plasmaphysik **12**, 63 [1972].